

Plano de Estudos

cesec

Matemática

Ensino Médio

Módulo II



ESCOLA DE FORMAÇÃO
E DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL
DE EDUCADORES DE MINAS GERAIS

Governador do Estado de Minas Gerais

Romeu Zema Neto

Vice-governador do Estado de Minas Gerais

Mateus Simões de Almeida

Secretário de Estado de Educação

Igor de Alvarenga Oliveira Icassatti Rojas

Secretária Adjunta

Fernanda de Siqueira Neves

Subsecretária de Desenvolvimento da Educação Básica

Kellen Silva Senra

Superintendência de Políticas Pedagógicas

Rosely Lúcia de Lima

Diretoria de Modalidades de ensino e Temáticas Especiais

Fabiana Benchetrit dos Santos

Coordenação da Educação de Jovens e Adultos

Denise Jacqueline Silva Oliveira

Superintendente da Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores

Graziela Santos Trindade

Diretora da Coordenadoria de Ensino da EFE

Janeth Cilene Betônico da Silva

Elaboração e construção

Professores Formadores da Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores

Revisão

Equipe Pedagógica e Professores Formadores da Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores

Supervisão

Juliano Alves Andrade
Silene Gelmini Araújo Veloso

Prezado Estudante,

Você está recebendo o Plano de Estudos de **COMPONENTE CURRICULAR MATEMÁTICA - ENSINO MÉDIO – MÓDULO II**. Nele você encontrará conteúdos e propostas didáticas que o ajudarão a desenvolver habilidades fundamentais para o prosseguimento ou conclusão de seus estudos.

O material foi elaborado considerando o seu perfil, trajetória de vida, interesses, objetivos e necessidades. Neste Plano de Estudos você encontrará uma diversidade de textos, imagens, vídeos, músicas, questões, exercícios e outras propostas pedagógicas que foram elaboradas pensando em favorecer o seu processo de aprendizagem.

Você deverá desenvolver as atividades didáticas aqui propostas a partir dos suportes disponibilizados neste material e no Google Classroom. Porém, para o esclarecimento de qualquer dúvida ou para uma assessoria mais personalizada para a compreensão de conceitos ou realização das questões você pode contar com a orientação de estudos feita pelo professor orientador da aprendizagem do CESEC em que você está matriculado.

Desejamos que seus objetivos possam ser alcançados e que você continue em seu percurso escolar com sucesso.

Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais

SUMÁRIO

TEMA DE ESTUDO: Probabilidade e Estatística	05
TEMA DE ESTUDO: Números e Álgebra	12
TEMA DE ESTUDO: Números e Álgebra	22
REFERÊNCIAS	29

MODULO NÚMERO II DE ESTUDO CESEC

Referência: Ensino Médio

Ano Letivo: 2025

Área de Conhecimento: Matemática e suas Tecnologias

Componente Curricular: Matemática

PLANO DE ESTUDOS

Habilidades:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Unidade Temática:

- Probabilidade e Estatística.

Objetos de Conhecimento:

- Princípio multiplicativo e princípio aditivo.
- Modelos para contagem de dados.

Olá

Neste caderno vamos falar sobre:

- **Princípio fundamental da contagem:** Ferramentas fundamentais de contagem. O princípio multiplicativo é usado quando várias etapas independentes ocorrem em sequência, enquanto o princípio aditivo se aplica quando há escolhas exclusivamente exclusivas.
- **Modelos para contagem de dados:** Métodos utilizados para organizar, contar e interpretar dados de maneira sistemática, facilitando a análise de grandes conjuntos de informações.
- **Sequências Numéricas:** Uma sequência organizada de números seguindo uma regra definida, onde cada termo depende de sua posição ou do termo anterior.
- **Progressão Aritmética:** Uma sequência numérica em que a diferença entre termos consecutivos é constante, conhecida como razão.
- **Progressão Geométrica:** Uma sequência numérica em que cada termo é obtido multiplicando o anterior por uma constante, chamada de razão da PG.

- **Sistemas de equações lineares:** Conjunto de duas ou mais equações lineares que possuem variáveis comuns, onde buscamos encontrar um valor para essas variáveis que satisfaçam todas as equações simultaneamente.
- **Gráficos de funções lineares com uma ou duas variáveis:** Representações visuais de funções lineares, que mostram a relação entre variáveis em um gráfico, sendo uma reta para uma variável ou um plano para duas variáveis.

Neste caderno continuaremos fortalecendo nossas bases de conhecimento da matemática e desenvolvendo o pensamento lógico e crítico. Exploraremos temas organizados de maneira a facilitar seu aprendizado, proporcionando uma compreensão mais prática e didática da Matemática. É importante sempre que necessário retomar o caderno anterior para consultar e alinhar todo processo em construção.

Então.... Mãos à obra!

O princípio fundamental da contagem é a área da matemática que estuda as situações-problema envolvendo a contagem na ocorrência de um determinado evento (acontecimento), sem a necessidade de citarmos todas as possibilidades.

Vamos abordar um exemplo prático:



Fonte: Minas Gerais, 2022

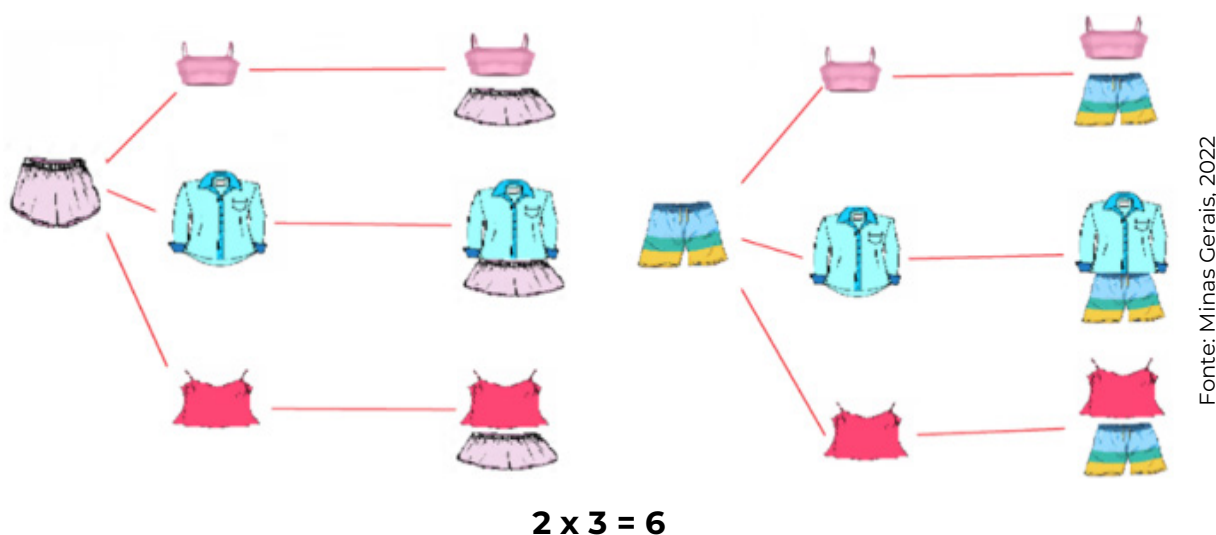
Quantas possibilidades de “looks” conseguiremos montar com as roupas disponíveis em nosso guarda roupas? Essa é uma condição que vivenciamos diariamente nas nossas vidas.

Para facilitar a compreensão e permitir o desenvolvimento sistemático e lógico de estratégias envolvendo possibilidades, bem como a análise matemática da combinatória, utilizaremos o diagrama de árvore.

Um diagrama de árvore é uma ferramenta visual que nos ajuda a tomar decisões, mostrando os diferentes resultados e suas consequências. Ele nos permite ver todas as escolhas possíveis e encontrar o melhor caminho para o resultado desejado, desenhando todas as possibilidades de forma organizada.

Voltando para o questionamento da ilustração acima vamos esboçar as possibilidades utilizando o diagrama de árvore:

Considerando que temos 2 shorts e três camisetas teremos quantas possibilidades diferentes de looks?



Assim fica mais fácil perceber que existem 6 possibilidades de looks diferentes.

Princípio multiplicativo

O princípio multiplicativo é utilizado para calcular o número de maneiras diferentes que vários eventos independentes podem ocorrer em sequência. Isso significa que, se você tem que fazer uma escolha na primeira situação "E" outra escolha na segunda situação "F", e assim por diante até a última situação, você multiplica o número de opções de cada situação para encontrar o total de combinações possíveis.

Exemplo:

Imagine que você está em um restaurante e precisa escolher sua refeição. Você deve escolher um prato, uma bebida e uma sobremesa. Para descobrir quantas combinações diferentes você pode fazer, usaremos o princípio multiplicativo.

No restaurante, há:

- 6 pratos diferentes
- 4 tipos de bebidas
- 4 sobremesas diferentes

Para encontrar o número total de combinações possíveis, multiplicamos o número de opções de cada categoria:

$6 \text{ pratos} \times 4 \text{ bebidas} \times 4 \text{ sobremesas} = 96 \text{ combinações diferentes}$

Isso significa que você tem 96 opções diferentes de combinações de prato, bebida e sobremesa para escolher no restaurante.

Princípio aditivo

O princípio aditivo é utilizado quando temos que escolher entre várias opções, mas apenas uma delas será escolhida em cada situação. Quando temos várias escolhas e cada uma é independente das outras, somamos o número de opções.

Exemplo:

Imagine que você está em um restaurante e pode escolher um lanche ou uma refeição. Para descobrir quantas escolhas diferentes você pode fazer, usaremos o princípio aditivo.

No restaurante, há:

- 5 tipos de lanches
- 3 tipos de refeições

Para encontrar o número total de escolhas possíveis, somamos o número de opções de cada categoria:

$5 \text{ lanches} + 3 \text{ refeições} = 8 \text{ opções diferentes}$

Isso significa que você tem 8 opções diferentes para escolher no restaurante, somando as opções de lanches e refeições.

Um pequeno resumo:

O princípio fundamental da contagem, são situações problema que exigem certo nível de atenção, ainda que as técnicas matemáticas utilizadas sejam bastante simples, como operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. Assim, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas.

Basta ter atenção, quando deve **multiplicar** ou quando deve **somar**. A dica é ficar atento nas conjunções “**E**” e “**OU**”, mesmo que ela não seja explícita, que nos remeterá para a multiplicação ou adição respectivamente.

Quando temos acontecimentos que se ligam através do “**E**” em uma situação problema, multiplicamos as situações sucessivas. Levando ao princípio multiplicativo que é utilizado no caso de eventos independentes. Quando temos acontecimentos que se ligam através do “**OU**” em uma situação problema, somamos os conjuntos de possibilidades. Levando ao princípio aditivo que é utilizado no caso de eventos mutuamente excludentes.

Para uma melhor compreensão segue o material sobre princípio multiplicativo e princípio aditivo disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/fatorial-principio-fundamental-da-contagem.htm>

Para uma melhor apropriação desses conceitos, vamos praticar:

ATIVIDADES

1. Um restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada, salsichão), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas (sorvete, romeu e julieta, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?
2. Juliana gosta de ir nas festas sempre utilizando looks diferentes, por isso, nunca utiliza a mesma combinação de roupas (blusa/ saia ou short ou calça / calçado). Sabendo que ela possui 10 blusas diversas, 3 saias, 4 shorts, 2 calças, 3 sapatilhas, 2 tênis e 2 sandálias, quantas festas ela poderá ir utilizando somente estas peças, sem repetir nenhuma combinação?
3. Um time de futsal composto por 10 jogadores é necessário escolher um capitão e um suplente para representar a equipe nos jogos. Quantas

combinações distintas destes dois representantes podemos ter?

- A) 19 combinações.
- B) 45 combinações.
- C) 90 combinações.
- D) 180 combinações.
- E) 290 combinações.

4. Uma loja de roupas oferece aos clientes a opção de escolher entre diferentes cores de camisetas e diferentes cores de calças. Se a loja possui 8 cores diferentes de camisetas e 5 cores diferentes de calças, quantas opções diferentes um cliente tem ao escolher uma camiseta ou uma calça?

- A) 10 opções.
- B) 13 opções.
- C) 15 opções.
- D) 40 opções.
- E) 56 opções.

5. Um cinema oferece aos espectadores a opção de escolher entre diferentes filmes para assistir e diferentes tamanhos de pipoca para comprar. Se o cinema está exibindo 6 filmes diferentes e oferece 4 tamanhos diferentes de pipoca, quantas opções diferentes um espectador tem ao escolher um filme ou um tamanho de pipoca?

- A) 9 opções.
- B) 10 opções.
- C) 14 opções.
- D) 20 opções.
- E) 24 opções.

[illegible]

PLANO DE ESTUDOS

Habilidades:

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Unidade Temática:

- Números e Álgebra.

Objetos de Conhecimento:

- Sequências Numéricas.
- Progressão Aritmética.
- Progressão Geométrica.

Neste caderno daremos um foco no aprendizado de sequências e em seguida abordaremos as progressões aritméticas (PA). Vocês aprenderão a identificar e associar essas progressões a funções afins, analisando suas propriedades, deduzindo fórmulas importantes e resolvendo problemas práticos. Estudaremos as progressões geométricas (PG) e suas associações com funções exponenciais. Vamos analisar suas propriedades, deduzir fórmulas e aplicar esses conhecimentos na resolução de problemas.

Para a construção do aprendizado em **Progressão**, vamos entender o que são sequências e seus padrões partindo do entendimento que uma sequência numérica é uma lista ordenada de números que seguem um padrão específico. Cada número na sequência é chamado de termo, e a posição de um termo na sequência é chamada de seu índice.

Por exemplo, considere a seguinte sequência:

2,4,6,8,10,...

Nesta sequência, cada termo é obtido adicionando 2 ao termo anterior. O primeiro termo é 2, o segundo termo é 4 ($2 + 2$), o terceiro termo é 6 ($4 + 2$), e assim por diante. Portanto, esta é uma sequência numérica onde o padrão é adicionar 2 a cada termo para obter o próximo.

Outro exemplo seria a sequência dos quadrados perfeitos:

1,4,9,16,25,...

Nesta sequência, cada termo é o quadrado do seu índice. O primeiro termo é 1 (1^2), o segundo termo é 4 (2^2), o terceiro termo é 9 (3^2), e assim por diante.

As sequências numéricas são amplamente utilizadas em matemática e em diversas áreas da ciência e engenharia para representar padrões, modelar fenômenos e resolver problemas.

Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência de números em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma. Essa diferença é chamada de razão da P.A..

Desta forma, a partir do segundo elemento da sequência, os números que aparecem são resultantes da soma da constante com o valor do elemento anterior dando origem ao próximo termo.

As progressões aritméticas podem ter um número determinado de termos (P.A. finita) ou um número infinito de termos (P.A. infinita).

Para indicar que uma sequência continua indefinidamente utilizamos reticências, por exemplo:

- a sequência (3, 6, 9, 12, 15, ...) é uma P.A. infinita.
- a sequência (80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10) é uma P.A. finita.

Cada termo de uma P.A. é identificado pela posição que ocupa na sequência e para representar cada termo utilizamos uma letra (normalmente a letra a) seguida de um número que indica sua posição na sequência.

Por exemplo, o termo a_3 na P.A (2, 4, 6, 8, 10) é o número 6, pois é o número que ocupa a 3ª posição na sequência.

Classificação de uma P.A.

De acordo com o valor da razão, as progressões aritméticas são classificadas em:

- **Constante:** quando a razão for igual a zero. Por exemplo: (4, 4, 4, 4, 4...), sendo
- $r = 0, 4 - 4 = 0$.
- **Crescente:** quando a razão for maior que zero. Por exemplo: (2, 4, 6, 8, 10...), sendo $r = 2, 4 - 2 = 2$.
- **Decrescente:** quando a razão for menor que zero (15, 10, 5, 0, - 5,...), sendo

$$r = - 5, 10 - 15 = -5$$

Fórmula do Termo Geral

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Onde,

a_n : termo que queremos calcular

a_1 : primeiro termo da P.A.

n : posição do termo que queremos descobrir

r : razão

A razão de uma P.A. é sempre constante, desta forma, podemos calcular seu valor a partir de quaisquer termos consecutivos, ou seja:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

Assim, podemos encontrar o valor do segundo termo da P.A. fazendo:

$$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$$

Veja um exemplo de aplicação para uma progressão aritmética.

Na aula de Ciências, Eduarda obteve as seguintes informações sobre o Cometa Halley:



Fonte: <https://br.freepik.com/>. Acesso em: 17/07/2020.

“O Cometa Halley foi identificado em 1682 pelo astrônomo Edmund Halley. É visível a cada 76 anos, quando fica próximo da Terra. A sua próxima aparição será a sexta, desde sua identificação.”

Eduarda, que hoje tem 16 anos, logo pensou: “Será que terei oportunidade de ver o cometa Halley? Em qual ano?”. Como Eduarda é uma aluna sempre atenta e estudiosa, usou seus conhecimentos em **Progressão Aritmética** para responder seus questionamentos.

Se o cometa Halley passa de 76 em 76 anos ($r = 76$), pode-se considerar que os anos de suas aparições se comportam como uma Progressão Aritmética (PA).

Assim, consideramos como primeira aparição o ano de 1682 ($a_1 = 1682$).

Como foi informado na aula de Ciências, sua próxima aparição será a sexta ($n = 6$).

Queremos descobrir o ano da sexta aparição ($a_6 = ?$).

Lembrando que o termo geral de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$.

então, $a_6 = 1682 + (6 - 1) \times 76$; logo, $a_6 = 2062$.

Eduarda concluiu que terá a oportunidade de ver o cometa Halley no ano de 2062.

Fonte: Minas Gerais, 2022

Vamos resolver problemas que envolvam a soma dos termos de uma progressão aritmética. Observe a seguinte sequência numérica: (1, 2, 3, 4, 5, ..., 96, 97, 98, 99, 100). Essa sequência é uma PA de razão 1.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Porém, podemos notar que:

$$\begin{array}{c}
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 \\
 \begin{array}{c}
 \text{3} + \text{98} = 101 \\
 \text{2} + \text{99} = 101 \\
 \text{1} + \text{100} = 101
 \end{array} \\
 \text{50 parcelas de 101} \\
 \text{50} \cdot \text{101} = 5\,050
 \end{array}$$

Para uma abordagem rápida segue a fórmula da soma dos termos da P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} :$$

Atividade resolvida:

1 — (Dante, 2017) Um teatro possui 12 poltronas na primeira fileira, 14 na segunda e 16 na terceira; as demais fileiras se compõem na mesma sequência. Qual a lotação máxima desse teatro, sabendo que nele existem 20 fileiras?

Resolução: Veja que as poltronas de cada fileira formam a PA (12, 14, 16, ...) e, para calcular o total de poltronas, devemos somar as poltronas de cada uma das 20 fileiras (S_{20}).

Primeiro, vamos descobrir quantas poltronas tem na 20ª fileira.

Sabemos que $r = 2$, $a_1 = 12$, $n = 20$, e com a fórmula do termo geral

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r,$$

obtemos:

$$a_{20} = 12 + (20 - 1) \times 2 \Rightarrow a_{20} = 12 + 19 \times 2 \Rightarrow a_{20} = 12 + 38 \Rightarrow a_{20} = 50.$$

Agora, podemos determinar o número de poltronas desse teatro S_n

$$S_{20} = \frac{(12 + 50) \times 20}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{62 \times 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 620.$$

Portanto, a lotação máxima desse teatro é 620.

Progressão Geométrica (PG) é uma sequência de números onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número fixo chamado de **razão** da PG.

Exemplo:

2,6,18,54,162,...

Nesta sequência, cada número é obtido multiplicando o número anterior por 3. Então, a razão da PG é 3.

$$2 \times 3 = 6$$

$$6 \times 3 = 18$$

$$18 \times 3 = 54$$

$$54 \times 3 = 162$$

Características principais:

- 1. Primeiro termo (a_1):** É o primeiro número da sequência. No exemplo acima, o primeiro termo é 2.
- 2. Razão (q):** É o número pelo qual multiplicamos para obter o próximo termo. No exemplo acima, a razão é 3.
- 3. Fórmula do termo geral:** Para encontrar qualquer termo de uma PG, usamos a fórmula:

$$a_n = a_1 \times q^{(n-1)}$$

Onde a_n é o n -ésimo termo, a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é a posição do termo na sequência.

Vamos praticar!

Dada a PG: 5, 10, 20, 40, ...

- **Primeiro termo (a_1):** 5
- **Razão (q):** 2 (porque 5 multiplicado por 2 é 10)

Usando a fórmula do termo geral:

- Para encontrar o 4º termo (a_4):

$$a_4 = 5 \times 2(4-1) = 5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$$

Então, o 4º termo é 40, que confirma nossa sequência.

Um exemplo importante:

Você já pensou no cuidado que temos que ter ao repassar uma notícia nas redes sociais?

Suponha que, ao receber uma notícia em uma rede social, vocês repassem essa notícia para três amigos na primeira hora e cada um desses amigos a repasse para três novos amigos na hora seguinte. Se considerarmos que esse padrão seja mantido, na décima hora, quantas pessoas terão recebido essa notícia?

Observe, na tabela abaixo, que o número de pessoas que recebem a notícia segue o padrão de uma progressão geométrica (PG).

1ª hora	2ª hora	3ª hora	4ª hora
3	9	27	...

Nessa PG, temos o primeiro termo $a_1 = 3$, a razão $q = 3$ e o número de termos $n = 10$.

Já sabemos que o termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 \times q^{(n-1)}$.

Então, temos: $a_{10} = 3 \times 3^{(10-1)} \Rightarrow a_{10} = 3 \times 3^9 \Rightarrow a_{10} = 59049$.

Portanto, na décima hora, 59 049 pessoas receberam essa notícia.

Soma dos n termos de uma Progressão Geométrica – PG

1º caso: Progressão geométrica finita ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$), com razão $q \neq 1$ e $q \neq 0$.

Seja S_n a soma dos termos da PG ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$). Então,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad | \quad a_n = a_1 \times q^{n-1} \Rightarrow S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}. \quad (I)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (I) pela razão q da PG, obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \text{ (II)}$$

Subtraindo as equações (I) e (II), temos:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}.$$

Um exemplo:

- Suponha que ao receber uma notícia em uma rede social, você repasse essa notícia para três amigos na primeira hora e cada um desses amigos a repasse para três novos amigos na hora seguinte. Se considerarmos que esse padrão seja mantido, na décima hora, quantas pessoas **ao todo** terão recebido essa notícia?

Resolução: Agora queremos saber o total de pessoas que receberão a notícia, ou seja,

$$S_{10} = n^{\circ} \text{ de pessoas da } 1^{\text{a}} \text{ hora} + n^{\circ} \text{ de pessoas da } 2^{\text{a}} \text{ hora} + \dots + n^{\circ} \text{ de pessoas da } 10^{\text{a}} \text{ hora.}$$

Utilizando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, temos:

$$S_{10} = \frac{3(1 - 3^{10})}{1 - 3} \Rightarrow S_{10} = \frac{3(1 - 59049)}{-2} \Rightarrow S_{10} = \frac{3(-59048)}{-2} = 88572.$$

2º caso: Progressão geométrica infinita ($a_1, a_2, a_3, \dots$), com razão q entre -1 e 1 ($-1 < q < 1$).

Como visto no caso anterior, a soma dos n primeiros termos da PG é ($a_1, a_2, a_3, \dots$) é:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Quando o número n de termos aumenta indefinidamente, ou seja, tende ao infinito, a potência q^n se aproxima indefinidamente de zero, ou seja, tende a zero, pois o número q está entre -1 e 1 . Assim, a

expressão S_n se aproxima indefinidamente de $\frac{a_1}{1 - q}$

Um exemplo:

Determine a soma dos termos da progressão geométrica infinita $(9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots)$.

Resolução: Inicialmente perceba que a razão da PG é $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ que é um número entre -1 e 1. Utilizando a fórmula da soma dos infinitos termos de uma PG infinita, $S = \frac{a_1}{1-q}$, temos:

$$S = \frac{9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = 9 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}.$$

Logo, a soma dos infinitos termos dessa PG é $\frac{27}{2}$.

Para apropriação desses conceitos, vamos praticar:

ATIVIDADES

1. Usando a fórmula do termo geral de uma PA, determine:

- A) o 15º termo da PA $(6, 11, \dots)$.
- B) o 1o termo da PA em que $r = -4$ e $a_{12} = -29$.
- C) o número de termos da PA, sabendo que o último termo é 78, $r = 4$ e $a_1 = 6$.
- D) a razão da PA, cujo primeiro termo é -3 e o quinto termo vale 17.

2. Determine

- A) a soma dos 11 primeiros termos da PA $(5, 8, \dots)$.
- B) a soma dos 9 primeiros termos da PA $(-5, -10, \dots)$.
- C) a soma dos 6 primeiros termos da PA em que $a_1 = -9$ e $r = 7$.
- D) o número de termos de uma PA em que $S_n = 710$, $a_1 = 7$ e $a_n = 64$.

3. (Banco Simave) Márcio quer treinar para disputar uma corrida. Ele programa correr 500 m no primeiro dia e, a partir do segundo dia, correrá 250 m a mais do que havia corrido no dia anterior. Cumprindo essa programação, quantos quilômetros, no total, ele terá corrido em trinta dias?

- A) 7,75.
- B) 62,5.
- C) 123,75.
- D) 247,5.

4. Determine

- A) o 10º termo da PG (5, -15, 45, -135, ...).
- B) o 5º termo da PG (1, 5, ...).
- C) a razão da PG na qual $a_1 = 2$ e $a_7 = 8192$.
- D) o número de termos de uma PG em que $a_n = 1458$, $a_1 = 18$ e $q = 3$.

5. Ao observar uma bactéria com o auxílio de um microscópio, um técnico nota que ela se subdivide em duas, ao fim de uma hora, e que cada nova bactéria tem o mesmo comportamento. Nessas condições, responda as questões a seguir.

- A) Qual é o termo geral da sequência formada pelas quantidades de bactérias, após cada subdivisão?
- B) Quantas bactérias resultarão desse processo, ao final de 8 horas?

6. (Banco Simave) As entradas para um show sertanejo foram vendidas nos 10 dias anteriores ao espetáculo. No primeiro dia, foram vendidas apenas 42 entradas, mas, aos poucos, o interesse do público aumentou, de modo que, nos demais dias, a venda de entradas foi sempre o dobro do dia anterior. Quantas entradas foram vendidas para esse show?

- A) 21504.
- B) 42966.
- C) 43008.
- D) 107 730.

7. (Banco Simave) Na soma dos termos da PG $(2, 2 \times 3, 2 \times 3^2, 2 \times 3^3, \dots, 2 \times 3^n)$, obtém-se 2 186. O valor de n é:

- A) 5.
- B) 6.
- C) 7.
- D) 8.

8. Uma moça seria contratada como balconista para trabalhar, de segunda a sábado, nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O patrão ofereceu R\$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e, nos dias seguintes, o dobro do que ela receberá no dia anterior. A moça recusou o trabalho. Se ela tivesse aceito a oferta, quanto teria recebido pelos 12 dias de trabalho?

[illegible]

PLANO DE ESTUDOS

Habilidades:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Unidade Temática:

- Números e Álgebra.

Objetos de Conhecimento:

- Sistemas de equações lineares.
- Gráficos de funções lineares com uma ou duas variáveis.

Apresentaremos nesta parte do Plano de Estudos a definição de equações lineares simultâneas que são sistemas de duas ou mais equações lineares com duas variáveis, onde buscamos encontrar um conjunto de valores que satisfaça todas as equações ao mesmo tempo.

Ao resolver e elaborar problemas do cotidiano da Matemática e de outras áreas do conhecimento que envolvem equações lineares simultâneas, utilizamos técnicas algébricas e gráficas para encontrar soluções práticas e eficientes. Essas técnicas nos permitem compreender e resolver situações reais. Podemos fazer isso manualmente ou com o apoio de tecnologias digitais, como calculadoras gráficas e softwares matemáticos, que facilitam a visualização e a resolução das equações. Essa habilidade nos ajuda a desenvolver o pensamento crítico e aplicar conhecimentos matemáticos de forma integrada e útil em diversas áreas do nosso dia a dia.

Trataremos de um sistema de equações lineares que é constituído por um conjunto de equações lineares que apresentam mais de uma incógnita. Para resolver um sistema é necessário encontrar os valores que satisfaçam simultaneamente todas as equações. Os métodos de resolução de sistemas lineares mais comuns são os métodos de adição, substituição e comparação.

Existem sistemas de equações com 2, 3, 4 ou mais incógnitas, no entanto, iremos nos aprofundar nos sistemas de equações com 2 incógnitas.

Agora vamos utilizar os métodos de resolução por adição e substituição.

Exemplos:

Ana tem em seu sítio alguns porcos e galinhas. Sabe-se que a soma destes animais é 54 e que a soma de suas patas é 136. Sabendo disso, determine quantos porcos e galinhas há no sítio de Ana.

O primeiro passo é montar as equações:

Vamos chamar o número de porcos de “x” e o número de galinhas de “y”, assim, analisando a primeira informação temos que $x + y = 54$.

Agora vamos analisar a segunda informação: se a soma das patas é 136, e sabemos que os porcos tem 4 patas e as galinhas tem 2 patas, teremos a equação $4x + 2y = 136$.

Agora podemos montar nosso sistema e em seguida resolver.

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ 4x + 2y = 136 \end{cases}$$

Método da adição

Neste método, a estratégia é eliminar uma das variáveis somando as equações, mas para isso é necessário que uma das variáveis tenha seus coeficientes (partes numéricas) como números opostos, ou seja, se o coeficiente de uma das incógnitas em uma das equações for 2, o coeficiente da mesma incógnita na outra equação deve ser -2. Caso isso não aconteça, podemos multiplicar toda a equação por um número conveniente para obter coeficientes opostos. Vamos nomear as equações como sendo I e II para facilitar o entendimento.

$$x + y = 54 \rightarrow \text{Equação I}$$

$$4x + 2y = 136 \rightarrow \text{Equação II}$$

The image shows a handwritten solution for the system of equations. It starts with the system: $\begin{cases} x + y = 54 \\ 4x + 2y = 136 \end{cases}$. A blue arrow points to the next step where the first equation is multiplied by -2: $\begin{cases} -2x - 2y = -108 \\ 4x + 2y = 136 \end{cases}$. Another blue arrow points to the result of adding the equations: $\begin{cases} 2x = 28 \\ 4x + 2y = 136 \end{cases}$. This is followed by the solution for x: $x = 28 / 2$ and $x = 14$. To the right, it says 'Agora substituímos o valor de x na equação I:' and shows the substitution: $x + y = 54$ becomes $14 + y = 54$, leading to $y = 54 - 14$. A note 'Se x = 14, temos:' is also present.

A solução para este problema é $x = 14$ e $y = 40$. Dizemos que o conjunto solução desse sistema é o conjunto $S = \{(14, 40)\}$, o valor da variável x sempre vem primeiro.

Então na fazenda de Ana há 14 porcos e 40 galinhas.

Método da substituição

Vamos resolver um outro sistema utilizando, agora, o método de substituição.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

No método da substituição a estratégia é isolar uma das incógnitas em uma das equações para substituí-la na outra equação. Vamos inicialmente numerar as equações em I e II.

$$2x + y = 3 \quad (\text{I})$$

$$x + 2y = -1 \quad (\text{II})$$

Isolando o “x” na equação II

$$x + 2y = -1$$

$$x = -1 - 2y$$

Agora vamos substituir o valor encontrado de “x” na equação I:

$$2x + y = 3$$

$$2(-1 - 2y) + y = 3$$

$$-2 - 4y + y = 3$$

$$-3y = 3 + 2$$

$$-3y = 5$$

$$y = -\frac{5}{3}$$

Agora substituímos o valor de “y” encontrado em qualquer uma das equações.

Substituindo “y” na 1ª equação.

$$2x + y = 3$$

$$2x + \left(-\frac{5}{3}\right) = 3$$

$$2x = 3 + \frac{5}{3}$$

$$2x = \frac{9+5}{3}$$

$$2x = \frac{14}{3}$$

$$x = \frac{14}{6} \text{ que simplificando temos } \frac{7}{3} \text{ logo,}$$

$$\text{A Solução para este sistema é } S = \left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

Para representar um sistema linear no plano cartesiano, que é um gráfico com um eixo horizontal (x) e um eixo vertical (y), cada equação linear é representada por uma reta. Para desenhar essa reta, escolhemos alguns valores de x e calculamos os correspondentes valores de y.

Por exemplo, vamos tomar o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Para resolvermos este sistema pelo método da adição temos:

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Substituindo o valor de x temos que $2 - y = 5$ então $y = -3$

Logo a solução do sistema : **S** = {2, -3}

Quando representamos duas equações lineares no mesmo plano cartesiano, cada uma aparece como uma reta. O ponto onde essas retas se cruzam é chamado de ponto de interseção, e ele representa a solução do sistema linear, ou seja, os valores de x e y que satisfazem ambas as equações ao mesmo tempo.

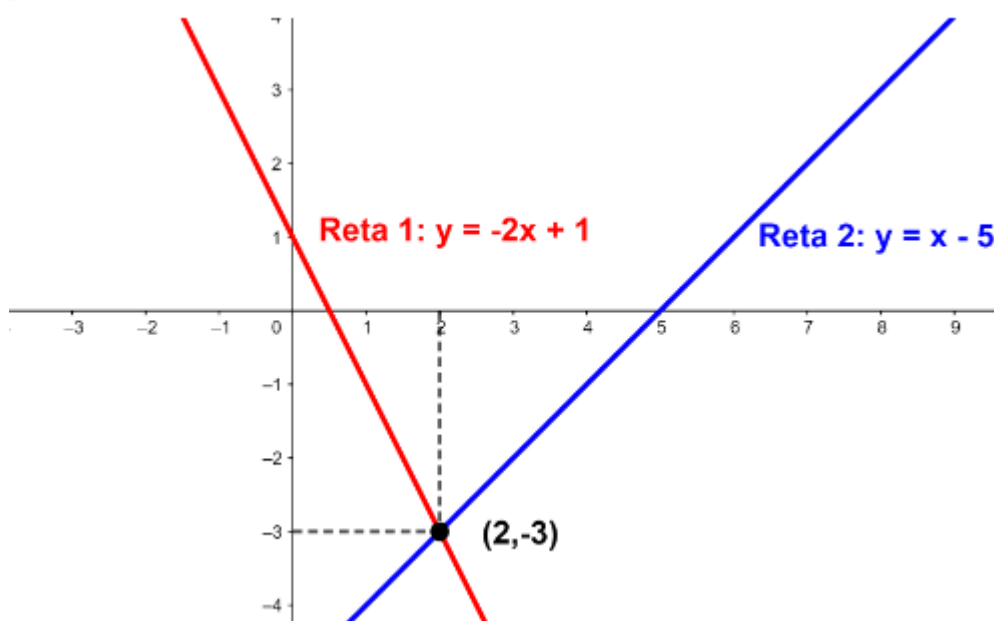
Se as retas se cruzam em um ponto, o sistema tem uma única solução. Se as retas são paralelas e nunca se cruzam, o sistema não tem solução (dizemos que é inconsistente). Se as retas são a mesma, ou seja, uma está em cima da outra, o sistema tem infinitas soluções, pois todos os pontos da reta são soluções.

Visualizar sistemas lineares dessa maneira ajuda a entender como as equações se relacionam e como suas soluções podem ser encontradas graficamente. A representação de um sistema graficamente é uma ferramenta que torna mais fácil resolver problemas reais onde precisamos encontrar valores que satisfazem múltiplas condições ao mesmo tempo.

Veja a representação gráfica do sistema que acabamos de resolver.

Observe que o ponto de interseção das retas é o mesmo que a solução que encontramos.

Imagem: Interseção de duas retas



Fonte: Ribeiro, 2024

Ao visualizar um sistema representado no plano cartesiano, ganhamos mais clareza e entendimento sobre os resultados. Isso porque a representação gráfica permite ver claramente como as equações se relacionam, onde elas se interceptam, e quais são as soluções possíveis. Esta abordagem visual facilita a compreensão das soluções e a identificação de sistemas com uma única solução, sem solução, ou infinitas soluções, tornando o aprendizado mais significativo.

Vamos praticar?

ATIVIDADES

1. A soma das idades de um pai e seu filho é 64 anos. Determine a idade de cada um, sabendo que a idade do pai é o triplo da idade do filho.

2. Resolva o problema e represente o resultado em um plano cartesiano.

A soma de dois números é igual a 13, a diferença entre o dobro do primeiro com o triplo do segundo é igual a 1. Quais são esses números?

3. Ao determinar dois números cuja soma é igual a 16 e a diferença entre o dobro do primeiro com o triplo do segundo é igual a 8 obteremos qual representação gráfica?

4. (ENEM – 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

- A) 300 tijolos.
- B) 360 tijolos.
- C) 400 tijolos.
- D) 480 tijolos.
- E) 600 tijolos.

5. (ENEM – 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R\$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R\$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

- A) R\$ 14,00.
- B) R\$ 17,00.
- C) R\$ 22,00.
- D) R\$ 32,00.
- E) R\$ 57,00.

[illegible]

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Inep. Matriz de referência do Enem. s. d. Disponível em: <https://cutt.ly/F5TLPv1>. Acesso em: 07 ago. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. Inep. Provas e gabaritos do Enem. s. d. Disponível em: <https://cutt.ly/SwuV3vbK>. Acesso em: 20 ago. 2024.

GEOGEBRA. Aplicativos Matemáticos. [s. l.], 08 mai. 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acesso em: 08 ago. 2024.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais**: educação infantil e ensino fundamental. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 6 mai. 2024.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso**. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg> Acesso em: 15 mar. 2022.

MINAS GERAIS (Estado). Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Material de Apoio Pedagógico Para Aprendizagens**. 2º ano. Ensino Médio - Matemática e suas tecnologias. Volume 1. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, Belo Horizonte, [s. l.], 2022. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1G9IA7IsWMPa5QwtJafZGq9GRUDO9fuEo/view> Acesso em: 20 mai. 2024.

MINAS GERAIS (Estado). Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Material de Apoio Pedagógico Para Aprendizagens**. 2º ano. Ensino Médio - Matemática e suas tecnologias. Volume 4. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, Belo Horizonte, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1Js2SM9_FIZ_oOq4Me88P0DmQyFd67Llr/view Acesso em: 20 mai. 2024.

MINAS GERAIS (Estado). Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Material de Apoio Pedagógico Para Aprendizagens**. 2º ano. Ensino Médio - Matemática e suas tecnologias. Volume 2. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, Belo Horizonte, [s. l.], 2022. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1MANhPs5oHYD5UtpyrfZogpeZC1AOPBXi/view> Acesso em: 21 mai. 2024.

RIBEIRO, Selmar. **Interseção de duas retas**. Belo Horizonte, 2024.