

Plano de Estudos

cesec

Matemática

Ensino Médio

Módulo IV



ESCOLA DE FORMAÇÃO
E DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL
DE EDUCADORES DE MINAS GERAIS

Governador do Estado de Minas Gerais

Romeu Zema Neto

Vice-governador do Estado de Minas Gerais

Mateus Simões de Almeida

Secretário de Estado de Educação

Igor de Alvarenga Oliveira Icassatti Rojas

Secretária Adjunta

Fernanda de Siqueira Neves

Subsecretária de Desenvolvimento da Educação Básica

Kellen Silva Senra

Superintendência de Políticas Pedagógicas

Rosely Lúcia de Lima

Diretoria de Modalidades de ensino e Temáticas Especiais

Fabiana Benchetrit dos Santos

Coordenação da Educação de Jovens e Adultos

Denise Jacqueline Silva Oliveira

Superintendente da Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores

Graziela Santos Trindade

Diretora da Coordenadoria de Ensino da EFE

Janeth Cilene Betônico da Silva

Elaboração e construção

Professores Formadores da Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores

Revisão

Equipe Pedagógica e Professores Formadores da Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores

Supervisão

Juliano Alves Andrade
Silene Gelmini Araújo Veloso

Prezado Estudante,

Você está recebendo o Plano de Estudos de **COMPONENTE CURRICULAR MATEMÁTICA - ENSINO MÉDIO – MÓDULO IV**. Nele você encontrará conteúdos e propostas didáticas que o ajudarão a desenvolver habilidades fundamentais para o prosseguimento ou conclusão de seus estudos.

O material foi elaborado considerando o seu perfil, trajetória de vida, interesses, objetivos e necessidades. Neste Plano de Estudos você encontrará uma diversidade de textos, imagens, vídeos, músicas, questões, exercícios e outras propostas pedagógicas que foram elaboradas pensando em favorecer o seu processo de aprendizagem.

Você deverá desenvolver as atividades didáticas aqui propostas a partir dos suportes disponibilizados neste material e no Google Classroom. Porém, para o esclarecimento de qualquer dúvida ou para uma assessoria mais personalizada para a compreensão de conceitos ou realização das questões você pode contar com a orientação de estudos feita pelo professor orientador da aprendizagem do CESEC em que você está matriculado.

Desejamos que seus objetivos possam ser alcançados e que você continue em seu percurso escolar com sucesso.

Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais

SUMÁRIO

TEMA DE ESTUDO: Geometria e Medidas.....	05
TEMA DE ESTUDO: Geometria e Medidas.....	15
TEMA DE ESTUDO: Geometria e Medidas.....	23
REFERÊNCIAS	38

MODULO NÚMERO IV DE ESTUDO CESEC

Referência: Ensino Médio

Ano Letivo: 2025

Área de Conhecimento: Matemática e suas Tecnologias

Componente Curricular: Matemática

PLANO DE ESTUDOS

Habilidades:

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

Unidade Temática:

- Geometria e Medidas.

Objetos de Conhecimento:

- Bases de sistemas de contagem (base decimal, base binária, base sexagesimal etc.).
- Principais unidades de armazenamento de dados na informática (bit, byte, kilobyte, mega-byte, gigabyte etc.) e transferência de dados.
- Conversão entre unidades compostas.
- Noções básicas de Matemática Computacional.

Neste caderno vamos falar sobre:

- **Bases de sistemas de contagem (base decimal, base binária, base sexagesimal etc.):** Diferentes sistemas numéricos usados para representar números, como base decimal (10), base binária (2) e base sexagesimal (60), cada uma com aplicações específicas.
- **Principais unidades de armazenamento de dados na informática (bit, byte, kilobyte, mega-byte, gigabyte etc.) e transferência de dados:** Medidas usadas para quantificar a capacidade de armazenamento de dados digitais, como bit, byte, kilobyte, megabyte e gigabyte, além das unidades de transferência de dados.
- **Geometria das Transformações: isometrias (reflexão, translação e**

rotação) e homotetias (ampliação e redução): Transformações geométricas que preservam ou alteram a forma e o tamanho das figuras, como reflexões, rotações e translações (isometrias), ou ampliações e reduções (homotetias).

- **Áreas de figuras geométricas:** Cálculo da superfície ocupada por figuras planas, utilizando fórmulas específicas para cada forma, como quadrados, triângulos e círculos.
- **Conceitos e procedimentos de geometria métrica:** Estudo das propriedades e medidas de figuras geométricas, como comprimento, área e volume, aplicando fórmulas e procedimentos padronizados.
- **Geometria Métrica: poliedros e corpos redondos:** Estudo das características e medidas de sólidos geométricos com faces planas (poliedros) e superfícies curvas (corpos redondos), como esferas e cilindros.
- **Área total de prismas, pirâmides e corpos redondos:** Cálculo da área da superfície externa de sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas.
- **Sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cilindros e cones):** Formas tridimensionais com superfícies planas ou curvas, com diferentes métodos para calcular área, volume e outras propriedades.
- **Cálculo de volume de sólidos geométricos:** Método para determinar o espaço ocupado por sólidos geométricos, como prismas, pirâmides, cilindros e esferas, usando fórmulas específicas.
- **Princípio de Cavalieri:** Teorema que afirma que sólidos com a mesma altura e seções transversais equivalentes têm volumes iguais, aplicáveis a vários tipos de sólidos geométricos.

Estas competências podem ser desenvolvidas com ou sem o uso de tecnologias digitais.

Vamos praticar!

Vamos começar entendendo que diferentes bases são usadas para diferentes propósitos.

Aqui estão alguns exemplos:

1. **Base Decimal (Base 10):** É o sistema de numeração mais comum, usado no dia a dia. Ele utiliza dez dígitos, de 0 a 9. Cada posição em um número decimal representa uma potência de 10.

Exemplo: O número decimal 3742 pode ser decomposto da seguinte forma:

- O dígito mais à direita (menos significativo) está na posição 0 e

representa 10^0

- O próximo dígito à esquerda está na posição 1 e representa 10^1
- O próximo dígito à esquerda está na posição 2 e representa 10^2
- O dígito mais à esquerda (mais significativo) está na posição 3 e representa 10^3

Então, temos:

$$3742_{10} = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Agora vamos calcular cada termo:

$$3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 1000 = 3000$$

$$7 \cdot 10^2 = 7 \cdot 100 = 700$$

$$4 \cdot 10^1 = 4 \cdot 10 = 40$$

$$2 \cdot 10^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

Portanto, o número decimal 3742 é composto pelos valores 3000, 700, 40 e 2, somados.

Resumindo:

- Decimal: 3742
- Decomposição: $3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1$
- Cada dígito em um número decimal representa uma potência de 10, começando da direita (posição 0) para a esquerda.

2. Base Binária (Base 2): Usado principalmente em computação, este sistema utiliza apenas dois dígitos, 0 e 1. Cada posição em um número binário representa uma potência de 2.

Exemplo: O número binário 1101 pode ser decomposto da seguinte forma:

- O dígito mais à direita (menos significativo) está na posição 0 e representa 2^0
- O próximo dígito à esquerda está na posição 1 e representa 2^1
- O próximo dígito à esquerda está na posição 2 e representa 2^2
- O dígito mais à esquerda (mais significativo) está na posição 3 e representa 2^3

Então, temos:

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Agora vamos calcular cada termo:

$$1 \cdot 2^3 = 1 \cdot 8 = 8$$

$$1 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4$$

$$0 \cdot 2^1 = 0 \cdot 2 = 0$$

$$1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Finalmente, somamos esses valores:

$$8 + 4 + 0 + 1 = 13$$

Portanto, o número binário 1101 representa o número decimal 13

Resumindo:

- Binário: 1101
- Decimal: 13

Cada dígito em um número binário representa uma potência de 2, começando da direita (posição 0) para a esquerda.

3. Base Sexagesimal (Base 60): Um sistema de numeração antigo, ainda usado em algumas aplicações modernas, como a medida de tempo (60 segundos em um minuto, 60 minutos em uma hora) e ângulos (360 graus em um círculo). Ele utiliza sessenta símbolos diferentes.

Exemplo: Vamos considerar o número sexagesimal 2:30:45.

Este número pode ser interpretado como 2 horas, 30 minutos e 45 segundos, similar ao modo como medimos o tempo. Para converter isso para a base decimal que é a base que adotamos no nosso sistema (base 10), precisamos calcular o valor total em segundos, somando as potências de 60 correspondentes a cada posição.

Passos para a conversão:

- ⇒ **Horas (2:30:45):**
 - As horas estão na posição mais significativa.
 - 2 horas = $2 \cdot 60^2$ segundos.

⇒ **Minutos (2:30:45):**

- Os minutos estão na posição do meio.
- 30 minutos = $30 \cdot 60^1$ segundos.

⇒ **Segundos (2:30:45):**

- Os segundos estão na posição menos significativa.
- 45 segundos = $45 \cdot 60^0$ segundos.

Agora, vamos calcular cada termo:

$$2 \cdot 60^2 = 2 \cdot 3600 = 7200 \text{ segundos}$$

$$30 \cdot 60^1 = 30 \cdot 60 = 1800 \text{ segundos}$$

$$45 \cdot 60^0 = 45 \cdot 1 = 45 \text{ segundos}$$

Finalmente, somamos esses valores:

$$7200 + 1800 + 45 = 9045 \text{ segundos}$$

Portanto, o número sexagesimal **2:30:45** representa 9045 segundos na base decimal.

Resumindo:

- Sexagesimal: 2:30:45
- Decimal: 9045 segundos

Cada posição em um número sexagesimal representa uma potência de 60, começando da direita (posição 0) para a esquerda. Este sistema ainda é usado em algumas aplicações modernas, como a medida de tempo e ângulos.

Compreender diferentes bases numéricas ajuda a desenvolver uma compreensão dos princípios matemáticos. Isso inclui a conversão entre diferentes bases e a compreensão das propriedades dos números, além de desenvolver o pensamento crítico e resolução de problemas.

Para introduzir o Sistema internacional de medidas que envolve as unidades de medidas para o uso das tecnologias, vamos fazer uma breve comparação.

Exemplo: Em astronomia, a distância lunar é a medida da distância da Terra até a Lua. Essa distância varia de acordo com a posição da Lua em sua órbita. A distância média entre o centro da Terra e o centro da Lua é de 384 400 km.

Neste exemplo, a unidade de medida utilizada é o quilômetro (km), que é comumente utilizado para medir distâncias em larga escala, como distâncias entre planetas, estrelas e galáxias. A descrição dessa distância em quilômetros nos permite compreender a magnitude do espaço envolvido. Portanto, o uso de unidades de medida, como quilômetros para comprimento, nos ajuda a entender e visualizar quantidades relacionadas ao espaço e à dimensão física dos objetos em estudo, tornando a informação mais acessível e compreensível.

Ao discutir avanços em tecnologia de armazenamento de dados, como discos rígidos é importante entender unidades como bits por segundo (bps), kilobits por segundo (kbps), megabits por segundo (Mbps), gigabits por segundo (Gbps), entre outras. Essas unidades descrevem a taxa na qual os dados são transmitidos entre dispositivos ou pela internet, e compreendê-las é bastante interessante para avaliar a eficiência e a velocidade das comunicações digitais, inclusive compreendermos a velocidade de internet que compramos.

A matemática computacional frequentemente envolve o uso de diferentes sistemas de numeração para representar dados e realizar cálculos. Entender essas bases é essencial para compreender como os computadores processam informações.

Por exemplo, se um dispositivo possui uma capacidade de 500 GB, sua capacidade convertida em megabytes é $500 \times 1024 = 512000$ MB. Se um documento de texto tem tamanho médio de 2 MB, o dispositivo pode armazenar aproximadamente $512000/2 = 256000$ documentos de texto aproximadamente.

Lembre-o de que:

- **Megabyte** (MB): É uma unidade de medida de armazenamento de dados. 1 megabyte é igual a 1.000.000 de bytes ou 8.000.000 de bits. É frequentemente usado para medir o tamanho de arquivos, como documentos, imagens e vídeos.
- **Megabit** (Mbit): É uma unidade de medida de velocidade de transmissão de dados. 1 megabit é igual a 1.000.000 de bits. É comumente usado para medir a velocidade da internet ou a taxa de transferência de dados em redes.

Aqui estão alguns exemplos para ilustrar a relação entre megabytes e megabits:

1. 8 Mbits = 1 MB: Se você tem 8 megabits de dados, isso é equivalente a 1 megabyte.

2. 1 Mbit = 0,125 MB: Para converter de megabits para megabytes, você pode multiplicar a quantidade de megabits por 0,125. Por exemplo, 1 Mbit é igual a 0,125 MB.
3. 50 Mbits = 6,25 MB: Se você tiver 50 megabits, isso corresponde a 6,25 megabytes.
4. 100 Mbits = 12,5 MB: 100 megabits equivalem a 12,5 megabytes.

Lembre-se de que a relação entre megabytes e megabits é importante ao lidar com armazenamento de dados e velocidade de transmissão. Assim, você pode tomar decisões sobre o uso desses dispositivos e otimizar sua experiência digital. Além disso, é importante estar ciente das convenções de unidades de medida, como as adotadas pelo Sistema Internacional (SI), mas também estar preparado para lidar com unidades alternativas que possam ser utilizadas em diferentes contextos. Para uma melhor compreensão segue uma tabela ilustrativa:

1 byte = 8 bits
1 kilobyte = 1024 bytes
1 megabyte = 1024 kilobytes
1 gigabyte = 1024 megabytes
1 terabyte = 1024 gigabytes

Para uma melhor compreensão deste tema assista ao vídeo disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wIzaBTXxd-Y>.

Segue um exemplo de aplicação:

Exemplo: Um Pen Drive é um dispositivo portátil de armazenamento de dados que utiliza memória flash para salvar informações. Esses dispositivos evoluíram significativamente ao longo dos anos, tanto em termos de velocidade quanto de capacidade de armazenamento.

Um pen drive moderno pode ter uma capacidade de 256 gigabytes (GB), o que permite o armazenamento de uma grande quantidade de arquivos, como documentos, músicas, vídeos e fotos. Para se ter uma ideia de sua evolução, modelos mais antigos, como os disponíveis há alguns anos, tinham uma capacidade bem menor, em torno de 64 gigabytes (GB).

Essa diferença de capacidade ilustra o avanço tecnológico na área de armazenamento digital. Enquanto um pen drive de 64 GB pode armazenar

cerca de 16.000 músicas de alta qualidade (aproximadamente 4 MB por música), um modelo de 256 GB pode armazenar quatro vezes mais, ou seja, aproximadamente 64.000 músicas, destacando-se como uma ferramenta indispensável para quem precisa transportar ou transferir grandes volumes de dados.

Na linguagem matemática temos:

$$1 \text{ GB} = 1024 \text{ MB}$$

$$256 \text{ GB} = 256 \times 1024 \text{ MB} = 262,144 \text{ MB}$$

$$\text{Número de filmes} = \frac{\text{Capacidade total}}{\text{Tamanho de um filme}}$$

$$\text{Número de filmes} = \frac{256 \text{ GB}}{4 \text{ GB}} = 64 \text{ filmes}$$

O que isso significa?

- O novo pen drive pode armazenar 4 vezes mais dados que o antigo.
- Se o pen drive antigo guardava 1.000 músicas, o novo pode guardar 4.000 músicas.
- Se o antigo armazenava 16 horas de vídeo, o novo pode armazenar 64 horas.

Para apropriação desses conceitos, vamos praticar:

ATIVIDADES

1. Cláudia tem um celular com uma memória de 64 Gb, esta memória corresponde a 64 bilhões de bytes. Faça o que se pede:

- A) Represente o valor da memória desse celular em forma de potência de 10.
- B) Cláudia adora fotos e armazena centenas dessas na memória do seu celular.

Se esses arquivos ocupam um espaço médio de 3,2 Mb (3,2 milhões de bytes), quantas fotos, no máximo, ela consegue armazenar em seu telefone?

2. Em um artigo de tecnologia, você lê que a velocidade de transferência de um novo serviço de internet é de 100 megabits por segundo (Mbps). A matéria compara isso com um serviço antigo, que tinha uma velocidade de 10 megabits por segundo (Mbps).

A) Converta a velocidade de 100 megabits por segundo (Mbps) para kilobits por segundo (kbps).

3. De acordo com exercício anterior, responda:

A) Quantas vezes a velocidade do novo serviço é maior que a do antigo?

4. Você está aprendendo sobre armazenamento de dados em seu computador. Seu pen drive tem uma capacidade de armazenamento de 8 gigabytes (GB). Quantos megabytes (MB) são equivalentes a essa capacidade?

5. Você está navegando na internet com uma velocidade de conexão de 10 megabits por segundo (Mbps). Se você está baixando um arquivo de 5 megabytes (MB), quanto tempo levará para o arquivo ser completamente baixado?

[illegible]

PLANO DE ESTUDOS

Habilidades:

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

Unidade Temática:

- Geometria e Medidas.

Objetos de Conhecimento:

- Geometria das Transformações: isometrias (reflexão, translação e rotação) e homotetias (ampliação e redução).

A beleza e a complexidade do mundo ao nosso redor podem ser, muitas vezes, descritas e compreendidas através de conceitos matemáticos fundamentais como noções de transformações isométricas e das transformações homotéticas. Na isomeria ocorre quando as imagens apresentam formato e tamanho idênticos. No caso das homotetias, apenas os formatos são iguais, podendo ter variação proporcional de tamanho.

Estes princípios não apenas envolvem a arte e a arquitetura, mas também são importantes na análise de estruturas moleculares e no desenvolvimento de tecnologias avançadas. Para o desenvolvimento da habilidade acima citadas exploraremos os conceitos, compreendendo como identificar padrões simétricos e suas especificidades.

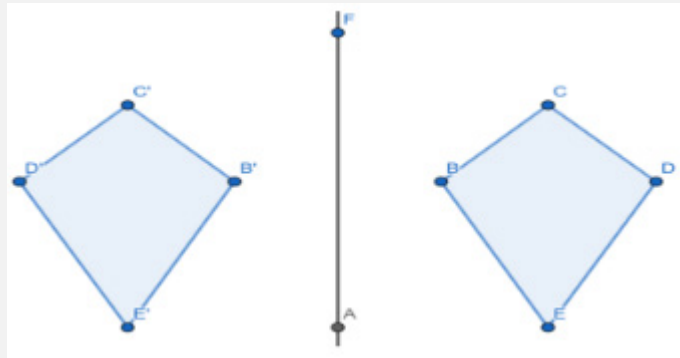
Isometria e as transformações isométricas:

Na geometria, a isometria é uma transformação realizada em figuras geométricas de forma que as medidas dos ângulos internos e externos são congruentes, ou seja, a figura geométrica é semelhante à original sem que ocorra distorções.

Existem três tipos básicos de transformações isométricas, a reflexão, rotação e translação.

Vamos compreender cada uma delas de forma detalhada.

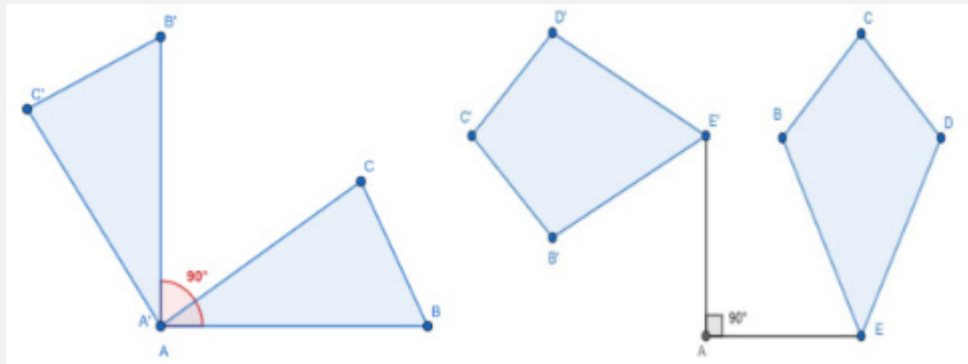
Reflexão: é uma transformação isotérmica, na qual a figura é refletida a partir de um determinado eixo.



Características:

- A figura fica invertida (espelhada) em relação ao eixo de reflexão.
- Todos os vértices da figura possuem a mesma distância perpendicular ao eixo de reflexão.
- A forma da figura é mantida.

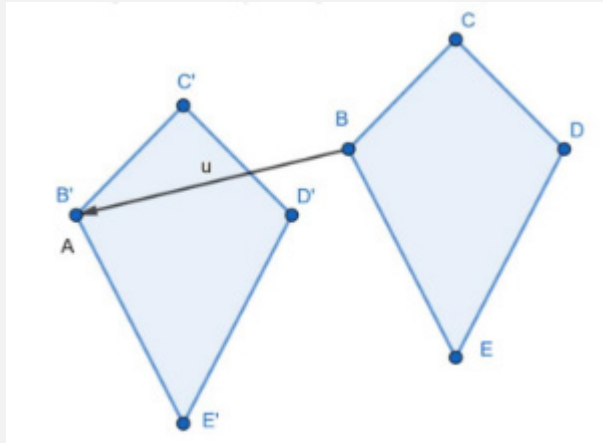
Rotação: é uma transformação isotérmica, onde a figura é rotacionada a partir de um ponto específico.



Características:

- A figura fica em uma posição diferente da que estava, ou seja, inclinada no grau que sofreu a rotação.
- Pode ser utilizado um ponto da própria figura para servir como ponto de rotação ou outro qualquer.
- A forma da figura é mantida.

Translação: é uma transformação isotérmica, onde a figura é deslocada para uma distância específica, seguindo uma determinada direção e em um determinado sentido (um vetor).

**Características:**

- A figura fica na posição que estava inicialmente, ou seja, sem nenhuma inclinação.
- A figura se desloca na mesma medida, direção e sentido do vetor.
- A forma da figura é mantida.

Homotetia e as transformações homotéticas

A homotetia é uma transformação geométrica que envolve a ampliação ou redução de uma figura a partir de um ponto fixo. Ela preserva a forma, os ângulos e as razões dos segmentos correspondentes. Vamos ver alguns exemplos:

Ampliação (Homotetia Direta):

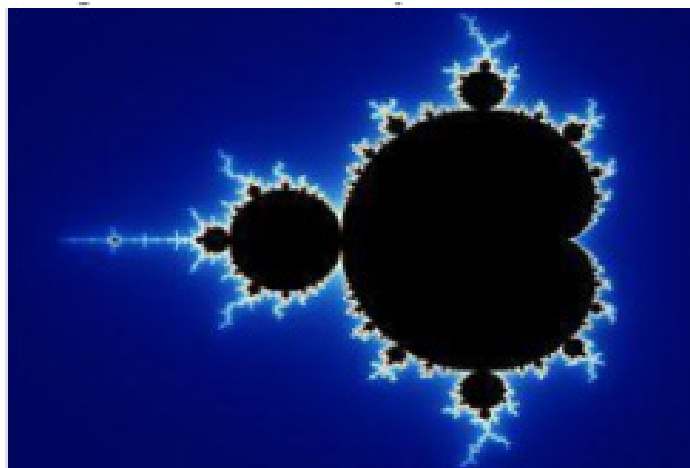
- ⇒ Imagine um triângulo equilátero com lados de 2 cm e outro triângulo equilátero com lados de 8 cm. Ambos têm o mesmo formato e ângulos, mas o segundo triângulo é 4 vezes maior que o primeiro. Essa ampliação é um exemplo de homotetia.
- ⇒ Fotografias também são exemplos de homotetia. A imagem capturada em uma câmera é uma projeção, uma transformação geométrica que muda as dimensões.

Redução (Homotetia Inversa):

- ⇒ Se pegarmos um triângulo maior e reduzirmos suas dimensões proporcionalmente, também estamos aplicando homotetia inversa.

Transformações homotéticas ou escalonamentos são fundamentais na construção de fractais. Em cada etapa do processo iterativo que gera um fractal, a figura original é transformada por meio de uma escala, criando múltiplas cópias em diferentes tamanhos que juntas formam a estrutura fractal. Exemplo: Conjunto de Mandelbrot

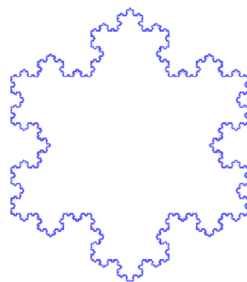
Figura : Outra vista do conjunto de Mandelbrot.



Fonte: Minas Gerais, 2023

Transformações isométricas, que incluem rotações, translações e reflexões, também desempenham um papel na criação de fractais, especialmente na construção de fractais mais complexos onde a auto-similaridade envolve não apenas escalonamentos, mas também movimentações e rotações das figuras. Exemplo: Floco de neve de Koch

Figura : Floco de neve de Koch



Fonte: Minas Gerais, 2023

Fractais são estruturas geométricas que exibem auto-similaridade em diferentes escalas. Em termos simples um fractal é um padrão que se repete em várias magnitudes, ou seja, quando você dá um zoom em uma parte do fractal, você encontra uma cópia reduzida do padrão original.

Aqui estão algumas características principais dos fractais:

- Cada parte do fractal é semelhante ao todo. Essa semelhança pode ser exata ou aproximada.

- Fractais podem ter detalhes infinitos, o que significa que você pode continuar explorando o fractal em diferentes escalas e sempre encontrar novos detalhes.
- Muitos fractais são gerados através de processos iterativos, onde um conjunto de regras simples é repetido várias vezes para criar uma forma complexa.
- Fractais não se encaixam facilmente nas dimensões inteiras tradicionais. Em vez disso, eles têm uma "dimensão fractal" que pode ser uma fração, indicando a complexidade do padrão.

Os fractais aparecem em muitos contextos na natureza e na matemática, como em paisagens montanhosas, flocos de neve, árvores e sistemas de vasos sanguíneos, além de serem usados em várias áreas da ciência e da arte.

Exemplos de fractais:

Imagem : Exemplos de Fractais



Fonte: Minas Gerais, 2023

Para saber mais acesse o material disponível em:
<https://pensaracademico.unifacig.edu.br/index.php/pensaracademico/articloe/view/186/163>

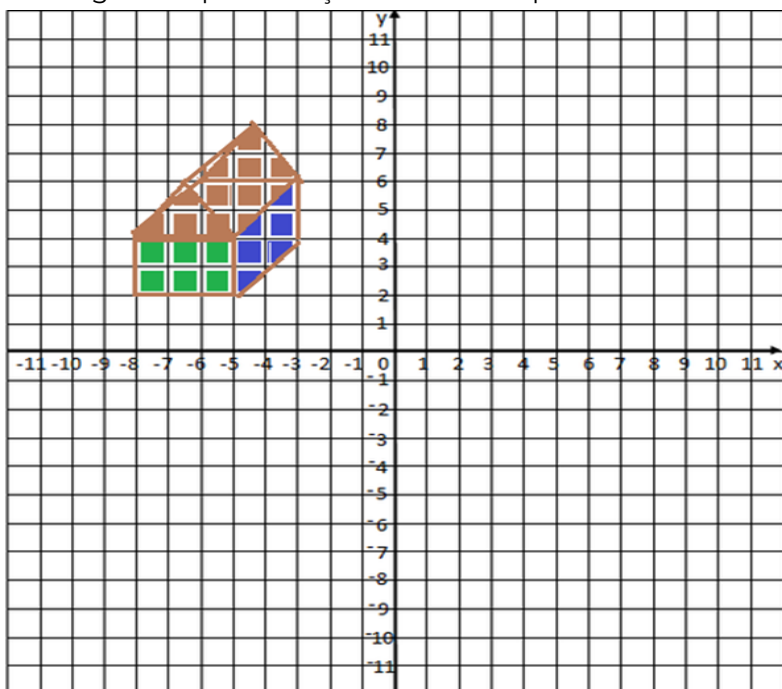
Para apropriação desses conceitos, vamos praticar:

ATIVIDADES

1. Em uma aula a professora apresentou o desenho de uma casinha no plano cartesiano e pediu para que os estudantes fizessem a reflexão desta imagem

no plano cartesiano, utilizando o piso da casinha como eixo de reflexão, apresente como ficará esta nova imagem?

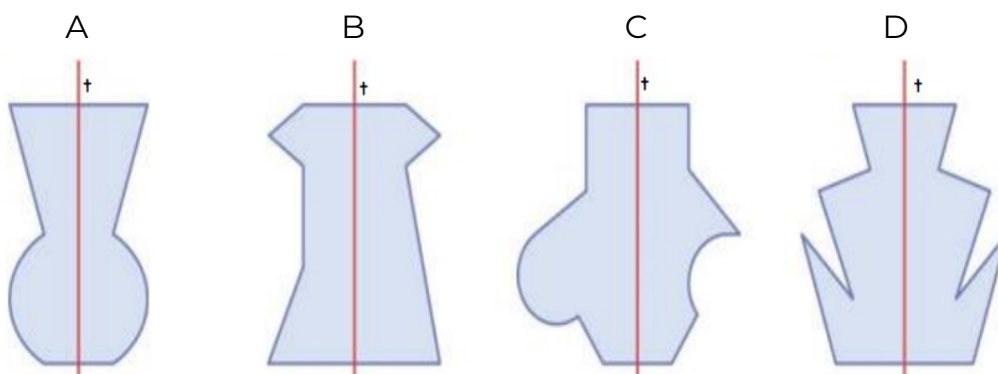
Imagem: Representação simetria no plano cartesiano



Fonte: Ribeiro, 2020

2. Observe as figuras abaixo e responda em quais itens o eixo t representa um eixo de simetria da figura.

Imagem: Exemplos Simetria



Fonte: Minas Gerais, 2022

3. Observe as fotografias das calçadas abaixo e responda:

Imagens : Simetria na calçada



Fonte: Minas Gerais, 2022

Imagem : Simetria calçada 2

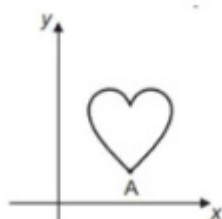


Fonte: Minas Gerais, 2022

- A) Existe simetria nas duas calçadas? Justifique
- B) Que tipo de simetria há nas calçadas?

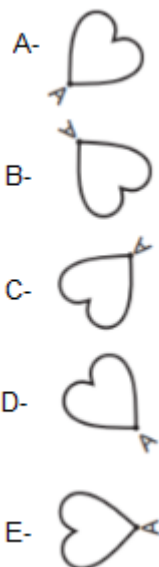
4. Relacione algumas imagens presentes no cotidiano que apresentam a simetria.

5. (Enem - 2018) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:



- 1º) Reflexão no eixo x ;
- 2º) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A ;
- 3º) Reflexão no eixo y ;
- 4º) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A ;
- 5º) Reflexão no eixo x .

Qual a posição final da figura?



PLANO DE ESTUDOS

Habilidades:

(EM13MAT309B) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo da capacidade de uma caixa d'água em diferentes formatos), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

Unidade Temática:

- Geometria e Medidas.

Objetos de Conhecimento:

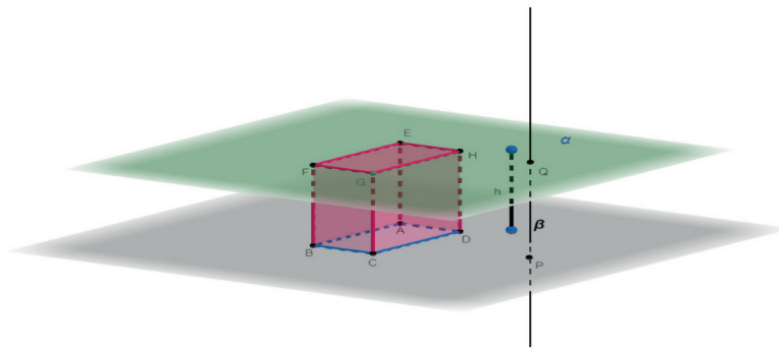
- Áreas de figuras geométricas.
- Conceitos e procedimentos de geometria métrica.
- Geometria Métrica: poliedros e corpos redondos.
- Área total de prismas, pirâmides e corpos redondos.
- Sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cilindros e cones).
- Cálculo de volume de sólidos geométricos.
- Princípio de Cavalieri.

Para o desenvolvimento desta habilidade vamos estudar os **Volumes de Sólidos Geométricos** que são figuras tridimensionais que possuem altura, largura e comprimento. Eles são estudados pela Geometria Espacial que estuda as figuras geométricas espaciais, também conhecidas como sólidos geométricos, e as suas relativas posições no espaço.

Prismas:

- Podemos definir um prisma, considerando dois planos distintos e paralelos, α e β , um polígono convexo contido no plano α e uma reta concorrente aos planos α e β . A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a esta reta com uma de suas extremidades no polígono contido em α e outra contida em β damos o nome de prisma.

Imagem : Representação do prisma



Fonte : Minas Gerais, 2021

Elementos de um prisma

Um prisma possui diversos elementos, que são:

Bases: são os polígonos contidos nos planos α e β , neste caso EFGH e ABCD;

Faces laterais: são os paralelogramos ABFE, BCGF, CDHG e ADHE;

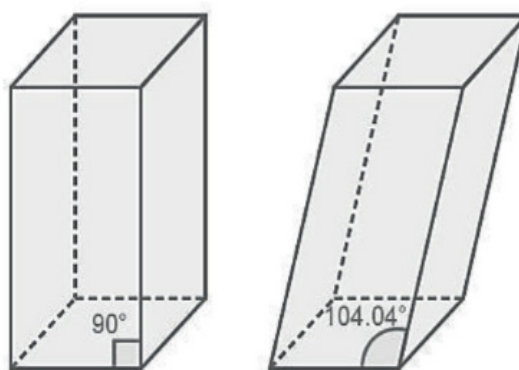
Arestas: em um prisma existem arestas das bases que são AB, BC, CD, AD, EF, FG, GH e EH e as arestas laterais que são AE, BF, CG e DH;

Altura: é a distância h entre os planos das bases.

Prismas retos e oblíquos

Os prismas retos são aqueles que possuem as suas arestas laterais perpendiculares às arestas da sua base, já os prismas oblíquos possuem suas arestas laterais não perpendiculares à base.

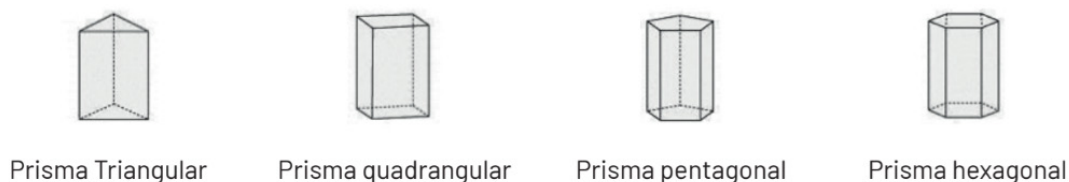
Imagem: Prisma reto e oblíquo



Fonte: Minas Gerais, 2021

Um prisma pode ser nomeado de acordo com o polígono de sua base. Damos o nome de prisma triangular se sua base for triangular por exemplo, ou pentagonal se sua base for um pentágono. Veja os exemplos abaixo.

Imagem: Diferentes prismas



Prisma Triangular

Prisma quadrangular

Prisma pentagonal

Prisma hexagonal

Fonte: Minas Gerais, 2021

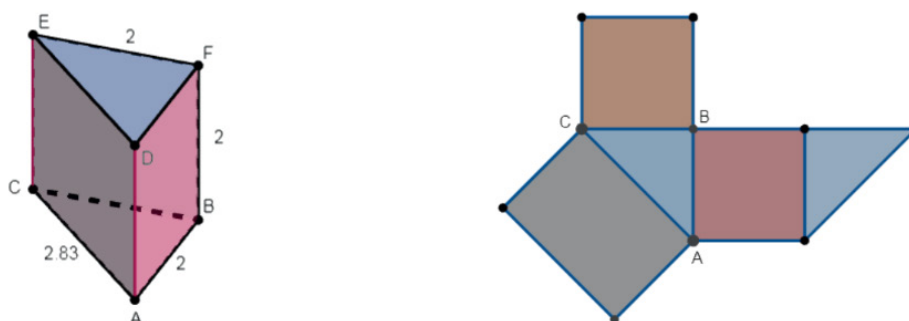
Área superficial de um prisma

A área superficial das faces de um prisma é calculada pela soma das áreas das faces laterais (A_l) com as áreas de suas bases (A_b), estas áreas superficiais somadas damos o nome de área superficial total do prisma (A_t).

$$A_t = A_l + A_b$$

A planificação de um sólido são as figuras geométricas das suas superfícies externas em duas dimensões, como se estivessemos abrindo o sólido, mas lembre-se que esta representação nos mostra somente as suas faces, e não o sólido como um todo. Esta área planificada é a área superficial do sólido.

Imagem: Planificação Prisma



Fonte: Minas Gerais, 2021

O volume de um prisma é dado pela área da base multiplicada pela altura:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

Exemplo:

Uma empresa vende cubos mágicos que possuem a medida de suas arestas (a) igual a 7 cm. Para enviá-los para seus clientes utiliza uma caixa de papelão no formato paralelepípedo com dimensões 98 cm de largura por 49 cm de comprimento e 56 cm de altura. Utilizando estas medidas calcule o que se pede:

- A.** Desconsiderando as dobraduras para o fechamento da caixa, qual é a quantidade de papelão que esta empresa irá gastar para fazer cada caixa? (Responda em m^2)

Para respondermos esta pergunta, basta calcularmos a área superficial desta caixa.

Considerando $a = 98$, $b = 49$ e $c = 56$, temos:

$$A = 2(ab + bc + ac)$$

$$A = 2 \cdot (4802 + 2744 + 5488)$$

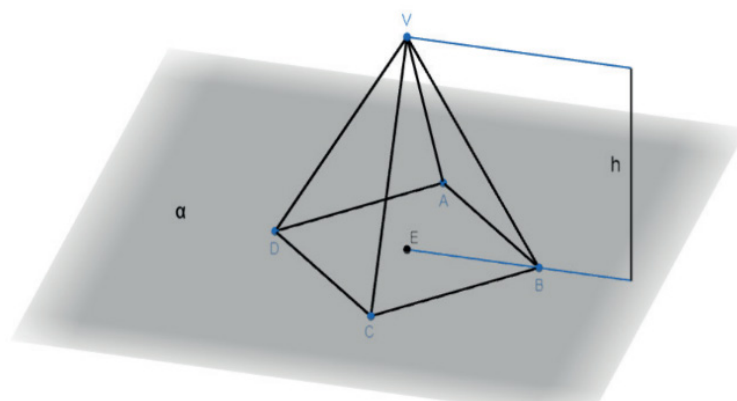
$$A = 2 \cdot 13034$$

$$A = 26068 \text{ cm}^2$$

Transformando 26068 cm^2 para m^2 temos $2,607 \text{ m}^2$

Pirâmides:

- Definimos uma pirâmide considerando um plano α , e um polígono convexo qualquer contido nele, e um ponto V qualquer não pertencente a este plano α . Uma pirâmide é a reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra em um ponto qualquer do polígono contido em α .



Fonte: Minas Gerais, 2021

Elementos de uma pirâmide

Uma pirâmide possui diversos elementos, que são:

Base: é o polígono contido no plano α , neste caso ABCD;

Faces laterais: são os triângulos $\triangle ABV$, $\triangle ADV$, $\triangle CDV$ e $\triangle BCV$;

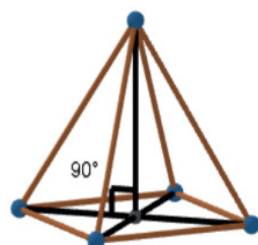
Vértice da pirâmide: é o ponto V;

Arestas: em uma pirâmide existem arestas das bases que são AB, BC, CD e AD, e as arestas laterais que são AV, BV, CV e DV;

Altura: é a distância h entre o plano da base e o vértice da pirâmide.

Classificação de pirâmides retas e oblíquas

Uma pirâmide é considerada reta quanto a projeção do vértice (V) coincide com o centro da sua base(E), já na pirâmide oblíqua a projeção do vértice não coincide com o centro da base.



Pirâmide reta

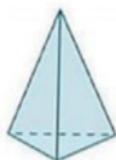


Pirâmide oblíqua

Fonte: Minas Gerais, 2021

Classificação de pirâmides quanto a sua base

Uma pirâmide pode ser classificada e nomeada de acordo com o polígono que forma a sua base.



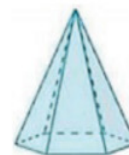
Pirâmide triangular



Pirâmide quadrangular



Pirâmide pentagonal



Pirâmide hexagonal

Fonte: Minas Gerais, 2021

Uma pirâmide é chamada de regular quando ela é reta e a sua base é composta por um polígono regular.

Nas pirâmides regulares existem algumas características que são essenciais nos cálculos de área superficial e volume da pirâmide.

Nessa pirâmide de base quadrada, temos:

A medida da altura da pirâmide: **h**

A medida da aresta da lateral da pirâmide: **a**

A medida da apótema da pirâmide: **p** (que é a altura do triângulo da face lateral)

A medida da apótema da base: **m**

A medida da aresta da base: **b**

Utilizando estas medidas e o teorema de Pitágoras podemos definir as seguintes relações: $p^2 = m^2 + h^2$

$$a^2 = p^2 + \frac{b^2}{2}$$

Área superficial de uma pirâmide

A área superficial das faces de uma pirâmide é calculada pela soma das áreas das faces laterais (A_l) com a área de sua base (A_b), esta área superficial somada damos o nome de área superficial total da pirâmide (A_t). A planificação de uma pirâmide representa a área superficial dela.

$$A_t = A_l + A_b$$

- O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela altura:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$$

Exemplo:

Calcule o volume e a área superficial de uma pirâmide de base quadrada de lado 10 cm e altura $h = 15$ cm.

Cálculo da área superficial da pirâmide

Para calcularmos a área dos triângulos das faces laterais, precisamos do valor da apótema a , utilizando o teorema de Pitágoras. O valor da apótema da base r é 5 cm, pois é a metade do valor do lado do quadrado.

$$a^2 = r^2 + h^2$$

$$a^2 = 5^2 + 15^2$$

$$a^2 = 25 + 225$$

$$a^2 = 250$$

$$a = \sqrt{250}$$

$$a = 5\sqrt{10}$$

Agora vamos calcular o valor da área lateral da pirâmide.

$$A_l = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow A_l = \frac{10 \cdot 5\sqrt{10}}{2} \rightarrow A_l = \frac{50\sqrt{10}}{2}$$

$$A_l = 25\sqrt{10} \text{ cm}^2$$

Agora calcularemos o valor da área da base da pirâmide.

$$A_b = l^2 \rightarrow A_b = 10^2 \rightarrow A_b = 100 \text{ cm}^2$$

A área total será as 4 faces laterais somadas à área da base, então teremos:

$$A_t = A_l + A_b$$

$$A_t = 4 \cdot 25\sqrt{10} \text{ cm}^2 + 100 = 100\sqrt{10} \text{ cm}^2 + 100 \text{ cm}^2 \text{ aproximadamente } 416,23 \text{ cm}^2$$

Cálculo do volume

Como o valor da base já foi calculado, basta aplicarmos a fórmula:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{100 \cdot 15}{3}$$

$$V = \frac{1500}{3}$$

$$v = 500 \text{ cm}^3$$

Corpos Redondos (Esferas e Cilindros):

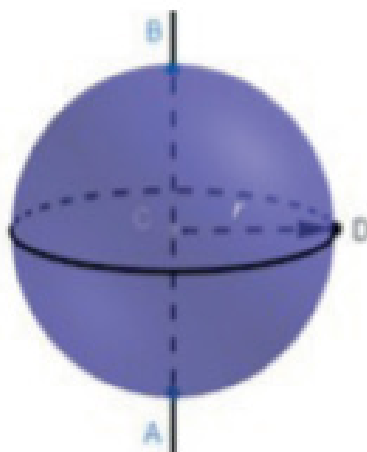
Também chamados de não poliedros, os corpos redondos são sólidos geométricos que possuem pelo menos uma das suas superfícies curvas. Iremos estudar nesta semana a esfera e o cilindro.



Fonte: Minas Gerais, 2022

Esferas:

- Dado um ponto **O** e um número real positivo r , chamamos de esfera a união de todos os pontos no espaço que estão a uma distância menor ou igual a r ao ponto **O**.



Fonte: Minas Gerais, 2022

Elementos da esfera

Centro (C): é o ponto central da esfera.

Raio (r): distância entre o centro **C** e um ponto qualquer da superfície da esfera.

Eixo (): é uma reta que passa pelo centro **C**,

Equador: é a circunferência obtida a partir de uma seção de um plano perpendicular ao eixo que passa pelo centro **C** da esfera. Esta é a maior circunferência que podemos obter em uma esfera.

Área superficial de uma esfera

A área superficial de uma esfera de raio r é dada por:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

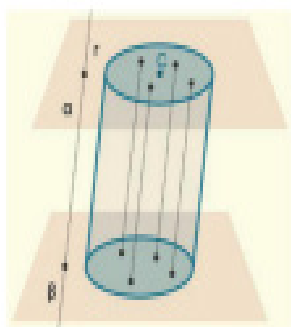
Volume de uma esfera

O volume de uma esfera de raio r é dada por:

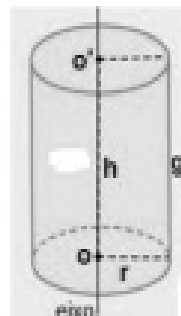
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Cilindro

Para definirmos um cilindro, consideramos dois planos paralelos α e β , e um círculo de raio r e o centro O contido no plano α , considerando uma reta r que é secante aos planos α e β , consideramos o sólido geométrico chamado de cilindro a união de todos os segmentos de reta paralelos a reta r que partem do círculo contido em α e tem a sua outra extremidade em um ponto contido no plano β .



Fonte: Minas Gerais, 2021



Fonte: Minas Gerais, 2022

Elementos de um cilindro

Bases: são os círculos contidos nos planos α e β .

Raio: é o raio do círculo da base do cilindro de centros O e O' , representada pela reta r .

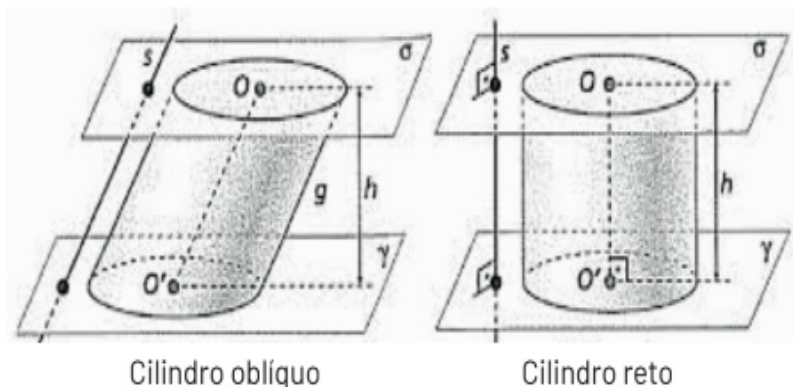
Altura: é a distância h entre os planos α e β onde estão contidas as bases.

Eixo: é a reta que passa pelos centros dos círculos das bases.

Geratrizes (g): são os segmentos de retas paralelos ao eixo do cilindro que possuem as suas extremidades nas circunferências das bases do cilindro.

Cilindros retos e oblíquos

Um cilindro é reto quando as suas geratrizes são perpendiculares às suas bases, já quando as suas geratrizes são oblíquas às suas bases ele será um cilindro oblíquo.



Fonte: Minas Gerais, 2021

Área superficial de um cilindro reto

A área superficial de um cilindro reto é calculada pela soma das áreas da superfície lateral (A_l) com as áreas de suas bases (A_b), esta área superficial somada damos o nome de área superficial total do cilindro (A_t). A planificação de um cilindro representa a sua área superficial.

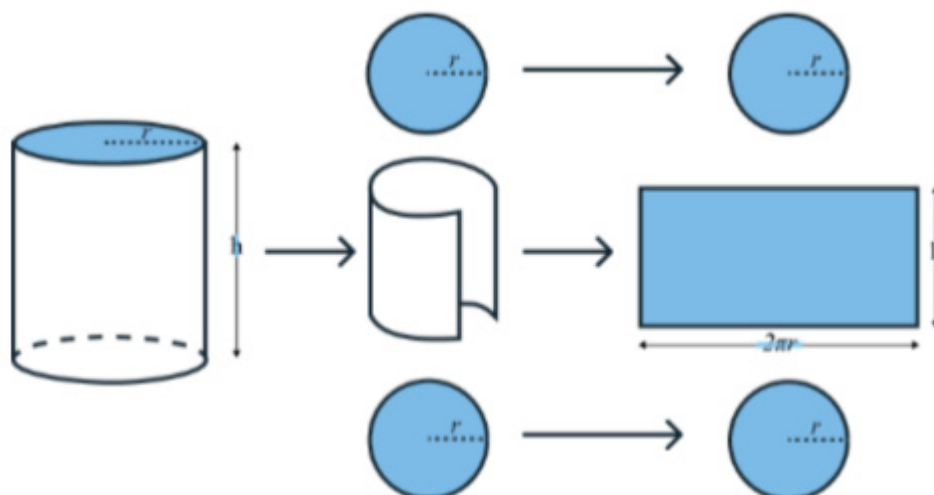
$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

A área da base do cilindro é dada por: $A_b = \pi \cdot r^2$

A área da lateral do cilindro é dada por: $A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

A área total do cilindro é dada por: $A_t = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r+h)$

Cilindro e sua planificação



Fonte: Minas Gerais, 2021

Volume

O volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura:

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h$$
$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Exemplo:

1 - Uma lata de formato cilíndrico reto tem o raio da base $r = 5$ cm e altura 15 cm. Qual é a capacidade volumétrica total e a sua área superficial? (Vamos adotar o valor de $\pi = 3,14$)

Resolução:

Área superficial:

$$A_t = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$$

$$A_t = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (5 + 15)$$

$$A_t = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 20$$

$$A_t = 628 \text{ cm}^2$$

Volume:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = 3,14 \cdot 5^2 \cdot 15$$

$$V = 1177,5 \text{ cm}^3$$

2 - Determine a área superficial e o volume de uma esfera de raio 0,6 m. (Vamos adotar o valor de $\pi = 3,14$)

Resolução

Área superficial:

$$A_t = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A_t = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,6^2$$

$$A_t = 4,5216 \text{ cm}^2$$

Volume:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

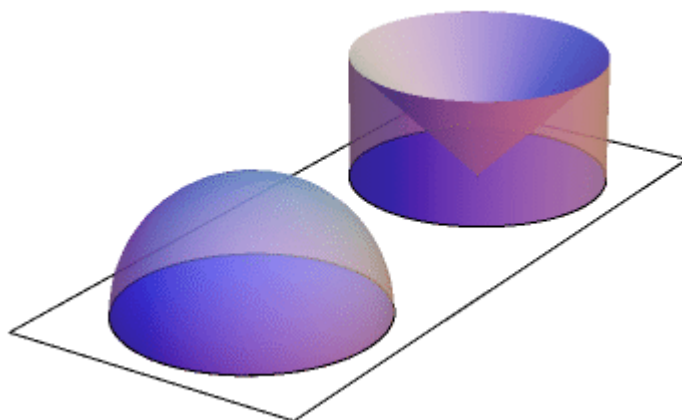
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi (0,6)^3$$

$$V_{\text{esfera}} = 0,9 \text{ cm}^3$$

Para encerrar este caderno, vamos explorar o Princípio de Cavalieri, uma ideia matemática que simplifica a compreensão de volumes e áreas de figuras geométricas. Imagine duas pilhas de livros lado a lado. Se as duas pilhas têm a mesma altura e, em cada camada, possuem a mesma

quantidade de páginas, então ambas ocupam o mesmo espaço, mesmo que os livros tenham formatos diferentes. Esse princípio nos ajuda a entender que, quando as alturas e seções de figuras são equivalentes, seus volumes também serão iguais, independentemente do formato.

Imagem: Princípio de Cavalieri



Fonte: Wikipédia, 2024

Exemplo 1: Retângulos e Paralelepípedos

- Pense em dois retângulos, um alto e estreito e o outro baixo e largo. Se esses retângulos têm a mesma altura e a mesma base, o Princípio de Cavalieri nos diz que a área ocupada por esses retângulos é igual.
- Agora, imagine dois paralelepípedos (caixas). Um deles é alto e fino, e o outro é baixo e largo. Se ambos têm a mesma altura e cada "fatia" horizontal tem a mesma área, então os volumes desses paralelepípedos serão iguais.

Exemplo 2: Pirâmides e Prismas

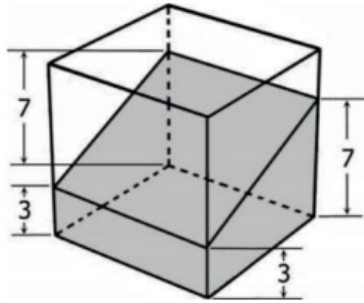
- Considere uma pirâmide e um prisma, ambos com a mesma altura e com bases que têm a mesma área. De acordo com o Princípio de Cavalieri, se cortarmos esses sólidos em fatias horizontais de igual espessura, e as áreas de cada fatia forem iguais, então a pirâmide e o prisma terão o mesmo volume.

Esses exemplos ajudam a entender que, ao comparar duas figuras, se as "fatias" ou seções transversais de cada uma forem iguais em todos os níveis, então as figuras ocupam o mesmo espaço, mesmo que seus formatos sejam diferentes. Isso é útil para calcular volumes e áreas de formas complicadas de maneira simples e intuitiva.

Para uma melhor apropriação desses conceitos, vamos praticar:

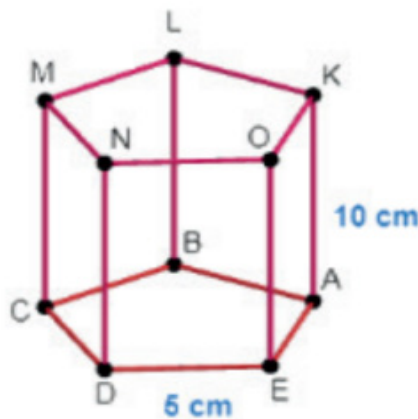
ATIVIDADES

1. (UFRGS - 2014) No cubo, que é um prisma, de aresta 10, da figura abaixo, encontra-se representado um sólido sombreado com as alturas indicadas no desenho. O volume do sólido sombreado é:



- A) 300.
- B) 350.
- C) 500.
- D) 600.
- E) 700.

2. Uma empresa de cosméticos fez um kit para vender especificamente para o dia dos pais e utilizou uma embalagem no formato de um prisma de base pentagonal conforme figura abaixo. Sabendo que esta embalagem foi toda feita de um papelão especial e considerando que para fazer as partes onde são feitas o fechamento será usado 10% a mais de papelão, qual foi a quantidade de papelão gasto nesta embalagem?



3. (Enem) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura. Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

- A) 156 cm³.
- B) 189 cm³.
- C) 192 cm³.
- D) 216 cm³.
- E) 540 cm³.

4. (ENEM – 2021) Uma loja de materiais de construção vende dois tipos de caixas-d'água: tipo A e tipo B. Ambas têm formato cilíndrico e possuem o mesmo volume, e a altura da caixa-d'água do tipo B é igual a 25% da altura da caixa-d'água do tipo A. Se R denota o raio da caixa-d'água do tipo A, então o raio da caixa-d'água do tipo B é:

- A) $\frac{R}{2}$.
- B) $2R$.
- C) $4R$.
- D) $5R$.
- E) $16R$.

5. (UFRGS–2006) Duas esferas de raio r foram colocadas dentro de um cilindro circular reto com altura $4r$, raio da base r e espessura desprezível, como na figura a seguir: Nessas condições, a razão entre o volume do cilindro não ocupado pelas esferas e o volume das esferas é:

- A) $\frac{1}{5}$
- B) $\frac{1}{4}$
- C) $\frac{1}{3}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{2}{3}$.

[illegible]

REFERÊNCIAS

CLUBES OBMEP. **Problema de gincana: de bytes a gigabytes**. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-de-bytes-a-gigabytes/>. Acesso em: 06 maio 2024.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Currículo Referência de Minas Gerais: educação infantil e ensino fundamental**. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1ac2_Bg9oDsYet5WhxzMIreNtzy719UMz/view. Acesso em: 3 jun. 2024.

MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Educação. **Plano de Curso**. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, [s. l.], 2022. Disponível em: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg> Acesso em: 3 jun. 2024.

MINAS GERAIS (Estado). Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Material de Apoio Pedagógico Para Aprendizagens**. 7º ano. Ensino Fundamental - Matemática e suas tecnologias. Volume 3. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, Belo Horizonte, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1CmHqryCo6LpwmUXDs_XpHuyS479fAb2l/view Acesso em: 3 jun. 2024.

MINAS GERAIS (Estado). Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Material de Apoio Pedagógico Para Aprendizagens**. 2º ano. Ensino Médio - Matemática e suas tecnologias. Volume 3. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, Belo Horizonte, [s. l.], 2023. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1SMYj76XN8GGQl53bcdOasSGtYWAsH3JM/view> Acesso em: 3 jun. 2024.

MINAS GERAIS (Estado). Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Material de Apoio Pedagógico Para Aprendizagens**. 2º ano. Ensino Médio - Matemática e suas tecnologias. Volume 2. Escola de Formação e Desenvolvimento Profissional de Educadores de Minas Gerais, Belo Horizonte, [s. l.], 2022. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1gePYww-g4cKCDMoMoGQiwJNVPsPoZg3_f/view Acesso em: 3 jun. 2024.

PRINCÍPIO DE CAVALIERI. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2024. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/83/Principio_di_Cavalieri.gif . Acesso em: 12 ago. 2024.

RIBEIRO, Selmara. **Representação simetria no plano cartesiano**. Belo Horizonte, 2024.

UNIDADES DE DADOS - **Bytes, Kilobytes, Megabytes, Gigabytes e Terabytes** [s. l.: s. n.], 1 vídeo de (1:48 min.). Publicado pelo canalReducática. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wIzaBTXxd-Y>. Acesso em 14. set. 2024